

De logische breinbreker uit New Scientist

Een vraagstuk
vol linguïstische instinkers ...

De opgave

- Als Joey even oud was als Chloe toen hij twee keer zo oud was als Zoe, hoeveel keer ouder zal Zoe dan zijn wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu?
- Alvast een eerste veronderstelling:
Gezochte factor f is een positief geheel getal
- Diophantisch probleem!

Drie tijdstippen:

- Nu: huidige leeftijd van Joey, Chloe en Zoe
- x aantal jaar geleden:
“toen hij (Joey) twee keer zo oud was als Zoe“
- y aantal jaar in de toekomst:
"wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu"

Meer dan een wiskundig probleem ...

- Verschillende linguïstische interpretaties mogelijk:
 1. "Als Joey even oud was als Chloe"
 1. "Als Joey even oud was als Chloe ***was op hetzelfde tijdstip***"
 2. "Als Joey even oud was als Chloe ***nu is***"
 2. "hoeveel keer ouder zal Zoe dan zijn"
 1. "hoeveel keer ouder ***dan ze nu is*** zal Zoe dan zijn"
 2. "hoeveel keer ouder ***dan toen*** zal Zoe dan zijn"

Interpretatie 1

Als Joey even oud was als Chloe *was op hetzelfde tijdstip* toen hij twee keer zo oud was als Zoe, hoeveel keer ouder *dan ze nu is* zal Zoe dan zijn wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu?

➤ Nogal onlogische interpretatie:

Joey en Chloe hebben dan gewoon dezelfde leeftijd!

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch - x, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f Zo, Jo ≥ x, Ch ≥ x, Zo ≥ x, x > 0, y > 0, f > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0, f > 0}]
```

```
C[1] ∈ ℤ && Ch == y && f == 2 && Jo == y &&
```

```
((x == 2 C[1] && y == 2 C[1] && Zo == 2 C[1] && C[1] ≥ 1) ||
```

```
(x == 1 + 2 C[1] && y == 1 + 2 C[1] && Zo == 1 + 2 C[1] && C[1] ≥ 0))
```

• Eenduidige oplossing voor f .

Interpretatie 1

- Eerste oplossingverzameling:

```
{C[1] == 0, x == 1, y == 1, f == 2, Jo == 1, Ch == 1, Zo == 1}
```

- Tweede oplossingverzameling:

```
{C[1] == 1, x == 2, y == 2, f == 2, Jo == 2, Ch == 2, Zo == 2}
```

➤ Triviale oplossingen ...

➤ Vereist nulleeftijden voor “toen” als oplossing

- Geen oplossing bij uitsluiting ervan:

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch - x, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f Zo, Jo > x, Ch > x, Zo > x, x > 0, y > 0, f > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0, f > 0}]
```

False

Interpretatie 2

Als Joey even oud was als Chloe **nu is** toen hij twee keer zo oud was als Zoe, hoeveel keer ouder **dan ze nu is** zal Zoe dan zijn wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu?

- Met inbegrip van nulleeftijden:

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f Zo, Jo ≥ x, Ch ≥ x, Zo ≥ x, x > 0, y > 0, f > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0, f > 0}]
```

```
(C[1] | C[2] | C[3]) ∈ ℤ && C[1] ≥ 0 && C[2] ≥ 0 && C[3] ≥ 0 &&  
y == 2 C[4] && f == 3 && ((x == 1 + 2 C[1] + C[2] && 2 + 3 C[1] + 2 C[2] + C[3] == C[4]) | |  
(x == 2 + 2 C[1] + C[2] && 3 + 3 C[1] + 2 C[2] + C[3] == C[4])) &&  
Jo + x == y && Ch + 2 x == y && Zo == C[4]
```

- Eenduidige oplossing voor f .

Interpretatie 2

- Bij uitsluiting van nulleeftijden:

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f Zo, Jo > x, Ch > x, Zo > x, x > 0, y > 0, f > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0, f > 0}]  
(C[1] | C[2] | C[3]) ∈ ℤ && C[1] ≥ 0 && C[2] ≥ 0 &&  
C[3] ≥ 0 && x == 1 + 2 C[1] + C[2] && y == 4 + 6 C[1] + 4 C[2] + 2 C[3] &&  
f == 3 && Jo + x == y && Ch + 2 x == y && Zo == 2 + 3 C[1] + 2 C[2] + C[3]
```

- **Eenduidige oplossing voor f.**
- Niet voor de leeftijden, was ook niet gevraagd
- Interpretatie 2 de meest logische.
- Triviale oplossing:

```
{C[1] == 0, C[2] == 0, x == 1, y == 4, f == 3, Jo == 3, Ch == 2, Zo == 2}
```


Interpretatie 3

Als Joey even oud was als Chloe **was op hetzelfde tijdstip** toen hij twee keer zo oud was als Zoe, hoeveel keer ouder **dan toen** zal Zoe dan zijn wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu?

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch - x, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f (Zo - x), Jo > x, Ch > x, Zo > x, x > 0, y > 0, f > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0, f > 0}]
```

$$(x \mid y \mid f \mid Jo \mid Ch \mid Zo) \in \mathbb{Z} \ \&\& \ x < y \ \&\& \ f + \frac{4x}{x-y} = 3 \ \&\& \ Jo = y \ \&\& \ Ch = y \ \&\& \ x + y = 2 Zo$$

➤ Meerdere oplossingen voor f:

$$\left\{ f \rightarrow -\frac{x+3y}{x-y}, Jo \rightarrow y, Ch \rightarrow y, Zo \rightarrow \frac{x+y}{2} \right\}$$

Interpretatie 3

- De eenvoudigste oplossing (x & y zo klein mogelijk):

{x == 1, y == 3, f == 5, Jo == 3, Ch == 3, Zo == 2}

- Andere eenvoudige oplossingen:

{x == 2, y == 4, f == 7, Jo == 4, Ch == 4, Zo == 3}

{x == 1, y == 5, f == 4, Jo == 5, Ch == 5, Zo == 3}

Interpretatie 4

Als Joey even oud was als Chloe *nu is* toen hij twee keer zo oud was als Zoe, hoeveel keer ouder *dan toen* zal Zoe dan zijn wanneer Chloe twee keer zo oud zal zijn als Joey nu?

- Bij uitsluiting van nulleeftijden:

```
FullSimplify[Reduce[{Jo - x == Ch, Jo - x == 2 (Zo - x),  
Ch + y == 2 Jo, Zo + y == f (Zo - x), Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0},  
{f, Jo, Ch, Zo}, Integers], {Jo > 0, Ch > 0, Zo > 0, x > 0, y > 0}]
```

$$(x \mid y \mid f \mid Jo \mid Ch \mid Zo) \in \mathbb{Z} \ \&\& \ f = \frac{3y}{-2x + y} \ \&\& \ Jo + x = y \ \&\& \ Ch + 2x = y \ \&\& \ y = 2Zo$$

- Meerdere oplossingen voor f:

$$\left\{ f = \frac{3y}{y - 2x}, Zo = \frac{y}{2}, Jo = y - x, Ch = y - 2x \right\}$$

Interpretatie 4

- De eenvoudigste oplossing (x zo klein mogelijk):

{x == 1, y == 4, f == 6, Jo == 3, Ch == 2, Zo == 2}

- Andere eenvoudige oplossingen:

{x == 2, y == 6, f == 9, Jo == 4, Ch == 2, Zo == 3}

{x == 3, y == 8, f == 12, Jo == 5, Ch == 2, Zo == 4}